

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی و آمار	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : انسانی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۸ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

۱ در تابع  $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$  حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف  $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$

ب  $f(3) + f(0)$

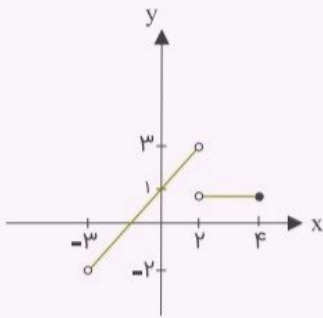
۲ با استفاده از جدول ارزش‌ها، درستی قاعدهٔ قیاس استثنایی  $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$  را نشان دهید.

۳ اگر  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی ثابت و  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g(x) = mx + n$  تابعی همانی باشد، حاصل  $\frac{a+m}{b-n}$  را بیابید.

۴ اگر  $f(x) = 4x^2 + 7x - 2$  و  $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$  باشد، دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  را بیابید.

۵ اگر  $f = \{(-1, 2), (-3, a), (-2, 5)\}$  و  $g = \{(-3, -4), (-2, b), (1, -1)\}$  و  $f \times g = \{(-3, \frac{1}{a}), (-2, -5)\}$  باشد، آنگاه حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

۶ اگر نمودار  $f$  به صورت زیر باشد، ضابطه این تابع را بیابید.



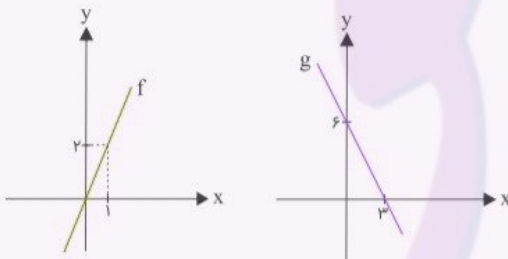
۷ هزینه پارکینگ یک فروشگاه براساس مدت زمان پارک ماشین ( $x$ ) به صورت زیر است. (هزینه برحسب هزار تومان)

$$C(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 2 \\ 4x & ; 2 \leq x < 5 \\ 4x + 3 & ; 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

ب فردی که ۴ ساعت از پارکینگ استفاده کرده، چه مبلغی باید بپردازد؟

۸ نقاط تقاطع توابع  $f(x) = |x - 2|$  و  $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x)$  را به دست آورید.

۹ اگر نمودار  $g$  و  $f$  مطابق شکل زیر باشد، نمودار  $f + g$  را رسم کنید.



۱۰ اگر  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  و  $f(x) = ax + ۱۴$  و  $g(x) = x^۲ + bx - ۱۵$  و  $D_h = \mathbb{R} - \{۳, c\}$  باشد، مقدار  $۲b - ۳c$  را بیابید.

۱۱ اگر  $f(x) = \begin{cases} x & ; \sqrt[۳]{x} \notin \mathbb{Q} \\ x+۱ & ; \sqrt[۳]{x} \in \mathbb{Q} \end{cases}$  مقدار عبارت  $F = f(۱۰۰) + f(۹۹) + \dots + f(۲) + f(۱)$  را به دست آورید.

۱۲ نمودار  $y = -|۲x - ۶|$  را رسم کنید.

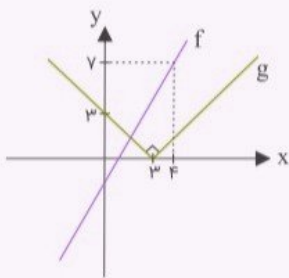
۱۳ اگر  $f$  یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی باشد و  $m, n \in \mathbb{N}$  باشند، مقادیر  $m$  و  $t$  را به دست آورید.  
 $f = \{(-۱, n^۲ - ۲n), (m - ۴, ۳), (m + n, t)\}$

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

۱۵ اگر  $f(x) = -|x - 1|$  و  $g(x) = [2x - 3]$ ، آنگاه حاصل  $(\frac{g}{f})(\frac{1}{4})$  کدام است؟

۱۶ اگر گزاره  $(\sim p \vee q)$  درست و گزاره  $(\sim q)$  نادرست باشد، آنگاه  $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee p)$  دارای چه ارزشی است؟

۱۷ باتوجه به شکل زیر حاصل  $(f + g)(2)$  را به دست آورید.



۱۸ اگر  $f(x) = x^2 - x + 1$  و  $R_f = \{7, 13, 43\}$  برد تابع  $f$  باشند، دامنهٔ تابع  $f$  را بیابید.

۱۹

نقطه  $(1 - 2a, a + 10)$  روی نیمساز ناحیه اول قرار دارد و تابع  $\left\{ (2, a - 1), (3, \frac{b}{2}) \right\}$  تابعی ثابت است. مقدار  $a$  و  $b$  را بیابید.

۲۰

اگر  $f$  تابعی ثابت باشد و به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}f(x) - 2$$

در این صورت حاصل  $f(3) \times f(-5)$  را بیابید.

۲۱

اگر  $p \vee q \equiv F$  و  $r$  دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

ب

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

۲۲ ارزش نقیض گزاره  $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee p)$  را به دست آورید.

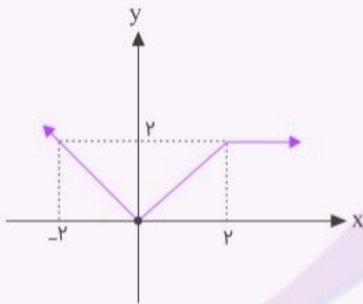
۲۳ در تابع ثابت  $f(x) = c$ :

الف مقادیر  $f(a)$  و  $f(b)$  و  $f(a+b)$  را مشخص کنید.

ب اگر در این تابع  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$  باشد،  $c$  چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۲۴ نمودار تابع  $y = |ax - b|$  محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۹ قطع می‌کند. در این صورت حاصل  $a - |b|$  را بیابید.

۲۵ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.





اگر  $f(x) = |x|$  ,  $g(x) = -|x|$  باشد دامنه و ضابطه  $\frac{f}{g}(x)$  را به دست آورده و آن را رسم کنید.





آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی و آمار	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : انسانی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۹ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		
نمره			

۱ الف

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) \Rightarrow x + x^2 \Rightarrow -\sqrt{2} + (\sqrt{3})^2 = -\sqrt{2} + 3$$

ب

$$f(3) + f(0) \Rightarrow 5 + x^2 \Rightarrow 5 + 0 = 5$$

۲

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

همواره صحیح است.

۳

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = mx + n \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a+m}{b-n} = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

تابع  $f$  و  $g$  چندجمله‌ای هستند پس  $D = \mathbb{R}$ . فقط باید  $x$ هایی که  $g(x)$  را صفر می‌کند به دست آوریم؛ پس معادله  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  را حل می‌کنیم و چون مجموع ضرایب صفر است، داریم:

$$x = 1, \quad x = \frac{2}{3}$$

بنابراین:

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$$

نکته: در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a + b + c = 0$  باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:  $x = 1$ ,  $x = \frac{c}{a}$ .

$$D_f = \{-1, -3, -2\}, \quad D_g = \{-3, -2, 1\}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{-3, -2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3) = a \\ g(-3) = -4 \\ (f \times g)(-3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} f(-2) = 5 \\ g(-2) = b \\ (f \times g)(-2) = -5 \end{cases} \Rightarrow 5b = -5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-1}{-\frac{1}{8}} = 8$$

دامنه تابع داده‌شده دارای ۲ قسمت است؛ یکی  $2 < x < -3$  و دیگری  $4 \leq x < 2$  و اگر معادله خط‌ها را بنویسیم،

داریم:

$$\text{اگر } -3 < x < 2:$$

$$A \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

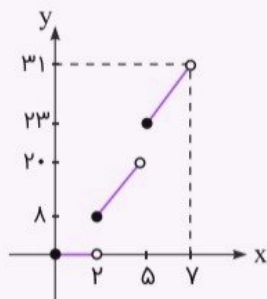
$$m = \frac{-2 - 3}{-3 - 2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

و اگر  $2 < x \leq 4$  باشد، داریم  $f(x) = 1$  که تابعی ثابت می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; -3 < x < 2 \\ 1 & ; 2 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$C(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ 4x & 2 \leq x < 5 \\ 4x + 3 & 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

$x$	$0$	$2$
$y$	$0$	$0$

$x$	$2$	$5$
$y$	$8$	$20$

$x$	$5$	$7$
$y$	$23$	$31$

ب از ضابطه وسطی داریم:

$$C(4) = 4(4) = 16$$

۱۶ هزار تومان باید بپردازد.

$$g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x), \quad f(x) = \begin{cases} x - 2 & ; x \geq 2 \\ -x + 2 & ; x < 2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - x) = (x - 2) \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$$

ریشه ندارد، لذا در  $x \geq 2$  تقاطعی ندارد.

$$x < 2 \Rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - x) = -x + 2 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$$

این دو نقطه، نقاط تقاطع توابع در  $x < 2$  است.

تابع  $f$  از نقاط  $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$  می‌گذرد، بنابراین معادله خط  $f$  عبارت است از:

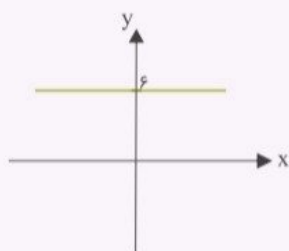
$$m = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow f(x) = 2x$$

و تابع  $g$  از نقاط  $\begin{vmatrix} 0 \\ 6 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$  می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{6 - 0}{0 - 3} = -2 \Rightarrow y - 6 = -2(x - 0) \Rightarrow g(x) = -2x + 6$$

$$f + g = 2x + (-2x + 6) = 6$$

پس نمودار  $f + g$  به صورت زیر می‌باشد:



توابع چندجمله‌ای  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\}$$

باتوجه به فرض مسئله که  $D_h = \mathbb{R} - \{3, c\}$ ، می‌فهمیم که:

$$g(3) = g(c) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(3) = 0 \Rightarrow 0 = 3^2 + 3b - 15 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2 \\ g(c) = 0 \Rightarrow 0 = c^2 + 2c - 15 \Rightarrow (c + 5)(c - 3) = 0 \end{cases} \begin{cases} c = -5 \\ c = 3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$b \times c = 2 \times -5 = -10$$

$$f(1) + f(8) + f(27) + f(64) = 2 + 9 + 28 + 65 = 39 + 65 = 104 \quad (1)$$

$$f(2) + f(3) + \dots + f(100) = 4950 \quad (2)$$

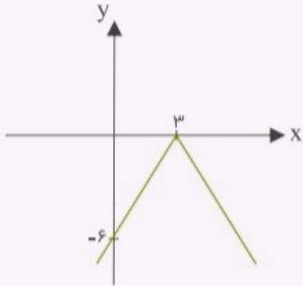
$$\Rightarrow (1) + (2) = 5054$$

در (۲) جمع  $f(1)$  تا  $f(100)$  را داریم به جز  $f(1)$ ،  $f(8)$ ،  $f(27)$  و  $f(64)$  که مجموعاً ۱۰۰ را باید از کل حاصل جمع یک تا صد کم کنیم.

منفی پشت قدر مطلق می‌گوید شکل آن به صورت شکل می‌باشد و اگر ریشه داخل قدر مطلق را به دست آوریم، داریم:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

و اگر محل برخورد شکل با محور  $y$  را بخواهیم به دست آوریم باید  $x = 0$  باشد. یعنی  $x = 0 \Rightarrow y = -6$  پس شکل به صورت زیر است:



تابع ثابت است پس عضوهای دوم زوجها باید مساوی باشند. در یکی از زوجها عضو دوم ۳ است، پس بقیه عضوهای دوم هم باید ۳ باشند.

$$t = 3, n^2 - 2n = 3 \Rightarrow \underbrace{n^2 - 2n - 3}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (n - 3)(n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -1 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 3 \end{cases}$$

$$f = \{(-1, 3), (m - 4, 3), (m + 3, 3)\}$$

دیدیم که طبق فرض  $n$  باید عددی طبیعی باشد لذا  $n = -1$  رد می‌شود. از طرفی طبق فرض دامنه فقط ۲ عضو دارد، ولی الان اعضای دامنه عبارتند از  $-1$  و  $m - 4$  و  $m + 3$ . پس باید دوتا از این اعضا باهم مساوی شوند. اگر  $m - 4$  با  $-1$  مساوی شود، داریم:

$$m - 4 = -1 \Rightarrow m = 4 - 1 = 3$$

$m = 3$  قابل قبول است چون عدد طبیعی است. اگر  $m + 3$  را با  $-1$  مساوی فرض کنیم، آنگاه:

$$m + 3 = -1 \Rightarrow m = -4$$

که جواب رد می‌شود چون  $-4$  عدد طبیعی نیست. ضمناً اگر  $m - 4$  را با  $m + 3$  مساوی قرار دهیم  $m$  ها حذف می‌شوند که باز هم قابل قبول نیست.



p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -\left|\frac{1}{y} - 1\right| = -\left|-\frac{1}{y}\right| = -\frac{1}{y}$$

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = \left[2\left(\frac{1}{y}\right) - 3\right] = [1 - 3] = [-2] = -2$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{g\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{-2}{-\frac{1}{y}} = 2$$

$\sim(\sim q) \equiv q$ ، پس  $q$  نادرست است و ازطرفی چون  $(\sim p \vee q)$  درست است و  $q$  نادرست است، بنابراین  $\sim p$  درست بوده و  $p$  هم نادرست می‌شود. حال خواسته مسئله را ارزش‌گذاری می‌کنیم:

$$\left(\underbrace{\sim p}_{\downarrow T} \vee \underbrace{p}_{\uparrow F}\right) \equiv T, \quad \left(\underbrace{p}_{\downarrow F} \wedge \underbrace{\sim q}_{\downarrow T}\right) \equiv F$$

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q) \equiv T \wedge F \equiv F$$

ابتدا ضابطه  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم و از آنجا که تابع مجموع را در  $x = 2$  خواسته، کافی است ضابطه تابع  $g$  را در حالتی که  $x \leq 3$  است، به دست آوریم:

$$f: \left| \begin{array}{c} 4 \\ y \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \Rightarrow m = \frac{4}{4}, y = \frac{4}{4}x \Rightarrow f(x) = \frac{4}{4}x$$

$$g: \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \right| \Rightarrow m' = -1 \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \frac{4}{4}(2) + (-2 + 3) = \frac{4}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

ضابطه تابع  $f$  را با اعضای برد مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 - x + 1 = 7 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x + 1 = 13 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 - x + 1 = 43 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 6) = 0 \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$D_f = \{-2, 3, -3, 4, -6, 7\}$$

چون نقطه  $(1 - 2a, a + 10)$  روی نیمساز ناحیه اول است پس  $y = x$  است.

$$1 - 2a = a + 10 \Rightarrow -3a = 9 \Rightarrow a = -3$$

و چون  $\left\{ (2, a - 1), (3, \frac{b}{4}) \right\}$  تابعی ثابت است پس مؤلفه‌های دوم باهم برابرند.

$$a - 1 = \frac{b}{4} \xrightarrow{a=-3} -4 = \frac{b}{4} \Rightarrow b = -16$$

چون  $f$  تابعی ثابت است، پس  $f(x) = k$  در نتیجه:

$$f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}k - 2 \Rightarrow \frac{2}{3}k = -2 \Rightarrow k = -3$$

بنابراین داریم  $f(x) = -3$  در نتیجه:

$$f(3) \times f(-5) = -3 \times -3 = 9$$

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \text{و} \\ q \equiv \text{و} \end{cases}$$

$r \equiv$  دلخواه

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

$$(\supset \Rightarrow r) \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \supset \Rightarrow (\supset \Rightarrow \supset) \equiv T \\ r \equiv \text{و} \Rightarrow (\text{و} \Rightarrow \supset) \equiv T \end{cases} \equiv T$$



$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \cup \\ q \equiv \cup \end{cases}$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D} \equiv T$$

می‌دانیم  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  در نتیجه:

۲۲

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

حال به بررسی سؤال می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \sim ((p \wedge q) \Rightarrow (r \vee p)) &\equiv (p \wedge q) \wedge \sim (r \vee p) \\ &\equiv (p \wedge q) \wedge (\sim r \wedge \sim p) \\ &\equiv (p \wedge \sim p) \wedge (q \wedge \sim r) \\ &\equiv F \wedge (q \wedge \sim r) \\ &\equiv F \end{aligned}$$

۲۳

الف

$$f(a) = c, \quad f(b) = c, \quad f(a+b) = c$$

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \Rightarrow c = c^r$$

$$\Rightarrow c^r - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

ب

چون محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند و محور  $y$ ها را در عرض ۹ قطع می‌کند، پس  $A \Big|_0^{\mathfrak{W}}$  و  $B \Big|_9^0$  روی نمودار قرار دارند. در نتیجه:

۲۴

$$B \Rightarrow 9 = |a(0) - b| \Rightarrow 9 = |-b| \Rightarrow |b| = 9 \Rightarrow b = \pm 9$$

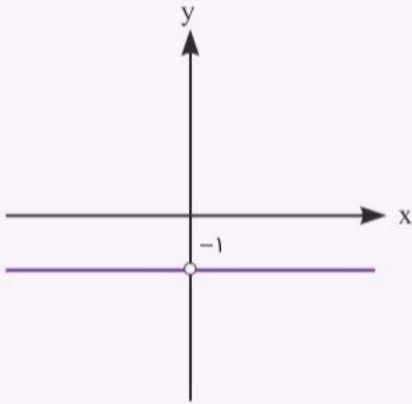
$$A \Rightarrow 0 = |a(\mathfrak{W}) - b| \Rightarrow |\mathfrak{W}a - b| = 0 \Rightarrow \mathfrak{W}a - b = 0 \Rightarrow \mathfrak{W}a = b$$

$$a = \frac{b}{\mathfrak{W}} \Rightarrow a = \frac{\pm 9}{\mathfrak{W}} = \pm \mathfrak{W}$$

بنابراین:

$$a - |b| = \pm \mathfrak{W} - 9 \begin{cases} \mathfrak{W} - 9 = -6 \\ -\mathfrak{W} - 9 = -12 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۲ \\ x & ۰ \leq x \leq ۲ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$



$$\frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} -۱ & ; x > ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{۰\}$$